УДК 519.254

К. П. Корнев, И. П. Корнева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРАКТИКУМЕ

Рассматриваются проблемы, связанные с методикой математической обработки результатов измерений в лабораторном практикуме с целью оптимизации процедуры расчета случайной ошибки.

The problems connected to a technique of mathematical processing of measurements results in a laboratory practical work are considered. The purpose of measurements results processing is optimization of procedure of random error calculation.

Ключевые слова: физические измерения, погрешности.

Key words: physical measurements, errors.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 168 – 173.

При обработке результатов измерений физических величин в рамках лабораторного практикума известен стандартный подход к расчету погрешностей [1; 2]. В данной статье не будут разбираться вопросы соотношения систематических и случайных ошибок и, соответственно, учета систематических ошибок при измерении физических величин. Эти проблемы достаточно подробно рассмотрены в упомянутых работах. Речь пойдет о методике вычисления *случайных ошибок* при выполнении достаточно небольшого набора измерений ($n \sim 5-10$), что определяется временем, выделенным на проведение лабораторной работы.

Возникновение этой проблемы связано с переходом на уровневое образование, когда студент сначала обучается в бакалавриате, а затем завершает образование в магистратуре. Вследствие этого на приведение лабораторного практикума выделяется меньше часов, что приводит к сокращению продолжительности занятий в физической лаборатории, а следовательно, продолжительности самих измерений.

Появились публикации, в которых предлагается изменить подход к расчету случайной погрешности. Например, Т. А. Семенова предлагает для *упрощения* вычислений следующее — «во всех практикумах младших курсов любых вузов необходимо исключить обработку случайных погрешностей эксперимента, основанную на нормальном распределении. На первых двух курсах мы учим студентов азам эксперимента, изучению простейших физических явлений, работе с приборами» [3, с. 32]. Алгоритм расчета погрешности будет сводиться к следующему:

1) проделать ***n*** измерений;

2) записать их в ряд по возрастанию измеренной величины;

3) вычислить медиану $\boldsymbol{x_m}$ **из соотношения**

$$\int_{X1}^{Xm} f(x)dx = \int_{Xm}^{X2} f(x)dx\,;$$

4) найти квартильные границы и записать результат в следующем виде:

$$\boldsymbol{x_m} = 5{,}74 \text{ м};\ \boldsymbol{x_m} \in (3{,}00;\ 6{,}32) \text{ м}.$$

Ясно, что никакого *упрощения* вычислений здесь не просматривается, поэтому следует пользоваться тем стандартным подходом, который описан во многих пособиях и методических указаниях [1; 2; 4—6].

При общепринятом подходе вычисляется либо среднеарифметическая ошибка, либо среднеквадратичная ошибка [1]. В первом случае погрешность рассчитывается по формуле

$$\Delta_A x = \frac{\sum_{1}^{K} \left| \bar{x} - x_i \right|}{k}\,, \tag{1}$$

где x_i — одно из значений измеряемой величины, а $\bar{x}$ — среднее значение величины по всей выборке.

Во втором случае, как правило, при расчете среднеквадратичной ошибки считается, что случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения, установленному Гауссом. Нормальный закон распределения ошибок выражается формулой

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2}$$

где Δx – отклонение от величины истинного значения;
σ – среднеквадратичная ошибка;
σ^2 – дисперсия, величина с помощью которой характеризуется разброс случайных величин [1].

Средней квадратичной ошибкой отдельного результата измерения называется величина

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \ . \tag{3}$$

Среднеквадратичной ошибкой среднего арифметического называется величина

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n\,(n-1)}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \ . \tag{4}$$

Стьюдент показал, что статистический подход справедлив и при малом числе измерений, но для расчета погрешности Δx в этом случае вводится специальный коэффициент (коэффициент Стьюдента $t_{a,n}$), зависящий от уровня значимости a и числа измерений n. Распределение Стьюдента при числе измерений $n \to \infty$ переходит в распределение Гаусса, а при малом числе отличается от него.

Тогда среднеквадратичную погрешность рассчитывают по следующей формуле:

$$\Delta x = S_{\bar{X}} \cdot t_{a,n}. \tag{5}$$

Такой подход является вполне правильным при условии, что априори известно: выборка значений, соответствующая измеренной величине, подчиняется распределению Гаусса. Заставлять студентов младших курсов проверять описывается ли данная выборка нормальным распределением нецелесообразно. Поэтому на каждой из лабораторных установок до проведения работ со студентами младших курсов следует провести достаточно много измерений (100-500) или набрать статистику по ранее проведенным измерениям, чтобы получить ***большую*** выборку и провести проверку на принадлежность данной выборки распределению Гаусса.

Если ***большая*** выборка описывается нормальным распределением, то расчет случайной погрешности следует вести по стандартной методике даже в том случае, когда число измерений невелико ($n \sim 5$ –10). Сказанное иллюстрируется данными, приведенными в таблице, которая составлена на основе измерений работы «Статистика радиоактивных распадов и проверка статистических гипотез», проведенных в лаборатории ядерной физики [7]. ***Большая*** выборка содержит 300 измерений счетчика Гейгера-Мюллера, который фиксировал излучение от радиоактивного источника за определенное строго фиксированное время.

Принадлежность ***большой*** выборки нормальному распределению проверялась на основе критерия Пирсона. Критерий Пирсона рассчитывался по данным полученной выборки:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{r} \frac{(k_i - Np_i)}{Np_i}, \qquad (6)$$

где k_i – эмпирические частоты появления измеряемой величины; N — объем выборки; p_i – теоретическая вероятность появления измеряемой величины; r – число классов.

Характеристики для выборок малого объема

Номер выборки	Среднее по выборке		Квадратичная погрешность		Арифметическая погрешность	
	n = 5	n = 10	n = 5	n = 10	n = 5	n = 10
1	39	38	9	4	5	4
2	37	35	4	4	3	3
3	36	37	7	5	4	5
4	36	34	8	4	5	4
5	40	38	6	4	3	5
6	35	37	6	5	4	6
7	39	37	10	6	5	7
8	39	37	10	4	6	4
9	40	39	5	5	3	5
10	37	34	6	4	3	4
11	37	33	8	4	4	4
12	35	33	5	4	3	4
13	39	40	9	4	6	5
14	40	37	8	6	5	6
15	41	40	8	4	5	5
16	37	35	8	5	4	6
17	38	40	8	5	5	5
18	40	38	9	4	6	4
19	34	35	10	7	7	8
20	33	34	5	3	4	3
Среднее по массиву	37,6	36,6	7	5	5	5

По расчетам для уровня значимости a = 0,05, значение критерия Пирсона χ^2 = 3,8 при критическом значении 12,6. Очевидно, что выборка объемом N = 300 описывается нормальным распределением. Следовательно, данные измерения могут быть использованы для проверки справедливости стандартного подхода [1; 2] к расчету погрешностей в том случае, когда число измерений невелико ($n \sim 5 - 10$).

Методика проверки заключалась в следующем:

1) из ***большой*** выборки объемом N = 300 с помощью специально написанной программы формировались случайные выборки объемом n = 5, 10, 20, 50, 100 измерений;

2) было сформировано по 20 выборок для каждого из указанных объемов;

3) для каждой выборки рассчитывались: среднее значение измеряемой величины; квадратичная (5) и арифметическая (1) погрешности;

4) полученные результаты для выборок объемом n = 5 и n = 10 сведены в таблицу;

5) средние значения измеряемой величины для каждой из полученных выборок сравнивались в пределах погрешности со средним значением по большой выборке.

Среднее значение измеряемой величины по большой выборке равно $\bar{x} = 36{,}6$.

Анализируя данные таблицы, можно убедиться, что средние значения измеряемой величины для каждой из полученных выборок в пределах погрешности совпадают со средним значением измеряемой величины по большой выборке.

Из этого можно сделать вывод, что в случае, когда генеральная совокупность измеренных значений подчиняется нормальному распределению, можно работать и с небольшими выборками, а расчет погрешности проводить по стандартной методике.

Что касается величины погрешности, а следовательно, и точности измерений, то здесь надо учитывать следующие обстоятельства:

1) если ограничиться вычислением среднеарифметической ошибки, то это, конечно, упрощает жизнь студентам, но величина ошибки будет мало меняться с увеличением числа измерений;

2) если же вычислять среднеквадратичную ошибку, то, как известно из теории, она уменьшается сростом числа измерений (4).

Сказанное иллюстрируется зависимостями, которые приведены на рисунке. Следовательно, для студентов среднеарифметическая ошибка может быть использована как оценочная.

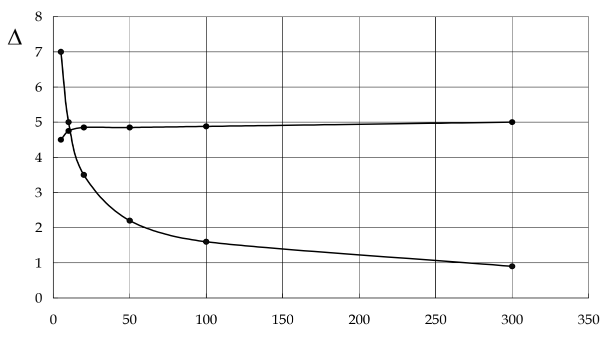

Рис. Зависимость погрешности среднего значения измеренной величины от объема выборки:
1 — для арифметической погрешности; *2* — для среднеквадратичной погрешности

Однако бывают лабораторные работы, в которых распределение измеренных величин далеко от нормального [7]. Тогда вычисление погрешности по указанной методике может привести к результату, который сильно отличается от истинного.

Список литературы

1. *Зайдель А. Н.* Ошибки измерений физических величин. Л., 1974.

2. *Кондратьев Е. Ф., Васильев А. С.* Обработка экспериментальных данных в лабораторном практикуме. Калининград, 1977.

3. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. М., 1971.

4. *Светозаров В. В.* Основы статистической обработки результатов измерений. М., 2005.

5. *Ефимова А. И., Зотеев А. В., Склянкин А. А.* Общий физический практикум физического факультета МГУ. Погрешности эксперимента. М., 2012.

6. *Кравченко Н. С., Ревинская О. Г.* Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме. Томск, 2011.

7. *Физический* практикум по атомной и ядерной физике : учебно-методическое пособие. Калининград, 2001. Ч.1.

Об авторах

Константин Петрович Корнев — канд. физ.-мат. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kkornev@rambler.ru

Ирина Павловна Корнева — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ikorneva05@rambler.ru

About the authors

Konstantin Kornev — PhD, docent, Department of Physics, Immanuil Kant Baltic Federal University.

E-mail: korneva@rambler.ru

Irina Korneva — PhD, docent, Department of Radio-Physics and Information Security, Immanuil Kant Baltic Federal University.

E-mail: ikorneva05@rambler.ru